数楽通信第１４号　「見上げてご覧夜の星を」　R4.8.1

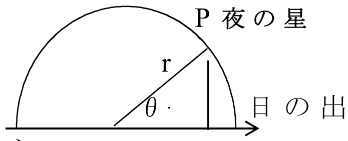
当時の映画

『見上げてごらん夜の星を』という歌を知っていますか。今、夜間中の音楽授業でも歌われています。私が、定時制高校勤務の時は、第二校歌のようにカラオケでよく歌ったものでした。これは、坂本九さんのヒット曲です。「見上げてごらん夜の星を　小さな星の小さな光りがささやかな幸せをうたってる　見上げてごらん　夜の星を　ぼくらのように　名もない星が・・・」数十年前のヒット曲ですが、2011 年、東日本大震災後、被災地でミュージシャンに歌われたり、復興に向けた希望の歌のリレーとして矢沢永吉、坂本龍一らが『上を向いて歩こう』と『見上げてごらん夜の星を』を歌うメッセージＣＭも放映されました。この歌の舞台は、高度成長期の昭和三十年代、家庭の経済状況から昼間の全日制高校へ進学できない生徒達が、働きながら、学んでいた夜間定時制高校です。2015 年ノーベル賞を受賞された大村先生が、高校教員時代に教えておられたのも、この時代の定時制高校です。

さて、ここでこの歌を取り上げたのは、前号の三角関数からもう一歩、数学的に進むためです。最近来られた高校生の方も、これからここを勉強するところですので、難しそうですが読んでみて下さい。前号の三角比の学習では、数千年前の古代エジプトでは、ナイル川（世界四大河川の一つ）の定期的な氾濫後、何の目印もなくなった泥地に縄を張り、土地を測量したことから、土地の測量を行う人は縄張り師といわれ、「縄張り」という言葉は、ここからという話をしました。しかし、継続的に三角比を使っていたのは星の観測です。季節は星の動きでわかります。そして農業に大切な暦をつくるためには、長期間の観測が重要です。ナイル川の氾濫の時期もシリウス星（ハリー・ポッターのシリウスの名もこれからです）の位置から予測できていたという話もしました。

古代バビロニア（時間の 60 進法の起源）では、神官たちが日食・月食も予言でき、それが絶対王権の背景だと言います。『見上げてごらん夜の星を』は古代からだったのです。

彼らは、星は、天球と呼ばれる透明なドームの上を、運行していると考えました。すると、すべての星までの距離は同じで、日の出の位置からの星 P が昇った角度 θ（シータ:ギリシャ文字）で星の位置が決まるわけです。天球の半径を r とすると、



高さは、三角比で言うと r × sin θ = rsin θ と表されるはずです。

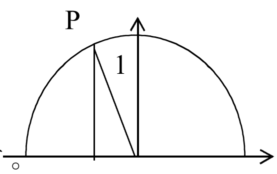
水平距離は、rcos θ ですね。θ が 90°までは、簡単です。

ここで簡単のために r=1 とします。これを単位円（unit circle）といいます。

（数学ではかんたんに持って行くのが定石です。難しくするのが数学と思っている人は自分で首を絞めることになります。）そして、数楽通信でも何度か取り上げたように、ここで座標を導入することによって、さらに話が、見通し良く、発展していきます。

y=sin θ , x=cos θ と書けたことによって鈍角の場合は、この式から逆に x 座標, y 座標によって sin θ , cos θ　を決めることができます。sin θ =y　→　**合い言葉「サインは y」**

例えば、θ =120°　なら P から x 軸に垂線を下ろすことによってできる三角形の辺の長さは、斜辺 1（r=1 ですから）



高さは　$\frac{\sqrt{3}}{2}$　底辺は$\frac{1}{2}$　ですが、座標としてみると、x 座標は負で鈍角の **cos** は負で cos120°= **-**1/2 となるのです。

　この定義が理にかなっていることは、星を観測することを考えてみると、よくわかりますね。日の出の位置を向いて、観測していたのですから、90°を越え、鈍角になると星が頭の上を越えて、後側に来るわけですから、負の数で表すわけです。

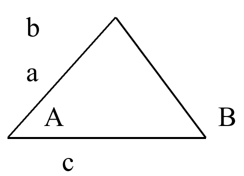
　さらに 180°を越えると、もう三角形は意味を持たなくなるのですが、x 座標，y 座標によって sin θ , cos θ を決める、定義するというやり方なら、どんな角 θ にも sin θ , cos θ の値を決めることができるわけです。1 年の時は、0°と 90° についても、この定義で sin0°， cos0° ,sin90° ,cos90° を決めることができました。

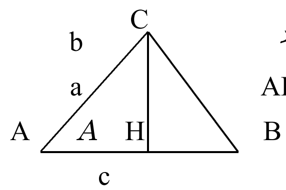
ここには、もう比というものはないわけですから、三角比ではなく、角 θ から sin θ , cos θ を決める規則、働きすなわち関数（function）が定められたということで三角関数となるわけです。

　こう決めると、実はいろいろなメリットが出てくるのです。ここでは鈍角の場合の復習として、余弦定理（ｽｰﾊﾟｰﾋﾟﾀｺﾞﾗｽ）の話をしてみましょう。

なぜ余弦定理を**ｽｰﾊﾟｰ・ﾋﾟﾀｺﾞﾗｽ**と呼ぶかというと、**ﾋﾟﾀｺﾞﾗｽ**の定理（三平方の定理）は直角三角形でしか成り立ちませんでした。ところが余弦定理は、どんな三角形でも、鋭角三角形でも鈍角三角形でも、もちろん直角三角形でも、成り立つからです。

それは、どうやって導かれるかというと、三角比の基本（「し」かける）と三平方の定理とを組み合わせて使うのです。数学の問題を解くときに、よくあるのですが、難しそうに見えて、とても手が出ないような問題でも、基本的な事の組み合わせで解けるのです。次の鋭角三角形で、辺 b,c 角 A から辺 a を求めましょう。三平方の定理を使うために頂点 C から辺 c に垂線をおろします。





その足を H とすると CH=bsin*A*・・・① ，AH=bcos*A*・・・②となります。（三角比は「し」にかける）

そして次ぎに △ CHB にうつると ②より BH=c-bcos*A* ・・・③ で

三平方の定理から $CH^2+BH^2=BC^2=a^2$ ，①,③を代入して $(b\sin A)^2+(c-b\cos A)^2=BC^2=a^2$

bsin*A*= b × sin*A* ,b × cos*A*=bcos*A*，$(\sin A)^2=\sin^2 A$ や $(b\sin A)^2=(b^2)(\sin A)^2=b^2\sin^2 A$ に注意して $(c-b\cos A)^2$ を升目で展開すると $a^2=(b\sin A)^2+(c-b\cos A)^2=$

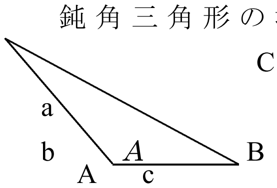
	c	-bcosA
c	c^2	-bcosA
-bcosA	-bcosA	$b^2\cos^2 A$

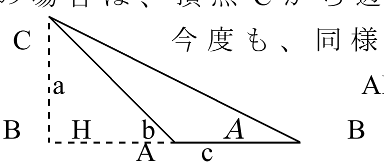
$=b^2\sin^2 A+c^2-bc\cos A+b^2\cos^2 A=b^2(\sin^2 A+\cos^2 A)+c^2-2bc\cos A$ となり、

$\sin^2 A+\cos^2 A=1$（三平方の定理の三角比版）から $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ と余弦定理が導かれます。

　鈍角三角形の場合　余弦定理の証明は鈍角の cos を負と決めたことが働きます。

　　鈍角三角形の場合は、頂点 C から辺 AB の延長線上に垂線をおろします。





今度も、同様に CH=bsin*A*,AH=bcos*A* ですが A が鈍角なので AH=bcos*A* が負になり、長さ BH が c-bcos*A* とやはり同じ式となり、後の変形は同じです。

したがって、座標で sin,cos を定義したということで 余弦定理は鈍角でも、鋭角でも同じ式で成り立つわけです。**余弦定理**（ｽｰﾊﾟｰ・ﾋﾟﾀｺﾞﾗｽ） $a^2=b^2+c^2-2bc\times\cos A$

（計算順を間違わないよう×を書きました。直角の時は cos0°=0 ですから三平方の定理となります。）